Soit K un corps quelconque.

Proposition 0.0.1 (Dual de $M_n(K)$). 1. *Soient $A \in M_n(K)$ et $f_A \in M_n(K)^*$, $X \mapsto Tr(AX)$. Alors $f : M_n(K) \to M_n(K)^*$, $A \mapsto f_A$ est un isomorphisme de $M_n(K)$ dans son dual.*

2. *Soit $\tilde{f} \in M_n(K)^*$ vérifiant pour tout $X, Y \in M_n(K)$, $\tilde{f}(XY) = \tilde{f}(YX)$. Alors il existe $\lambda \in K$ tel que pour tout $X \in M_n(K)$, $\tilde{f}(X) = \lambda Tr(X)$.*

Démonstration. 1) On note $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $M_n(K)$. Remarquons qu'on a pour tout $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$, $E_{ij}E_{kl} = \delta_{j;k}E_{il}$.
Soient $\lambda \in K$, $A, B \in M_n(K)$, pour tout $X \in M_n(K)$:

$$\begin{aligned} f_{\lambda A+B}(X) &= Tr((\lambda A + B)X) \\ &= Tr(\lambda AX + BX) \\ &= Tr(\lambda AX) + Tr(BX) \\ &= \lambda Tr(AX) + Tr(BX) \\ &= \lambda f_A(X) + f_B(X). \end{aligned}$$

D'où $f_{\lambda A+B} = \lambda f_A + f_B$ et donc f est linéaire.

Il suffit alors de montrer que f est injective et étant en dimension finie alors le théorème du rang nous donnera immédiatement la bijectivité de f.
Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(K)$ telle que $f_A = 0$.
On a pour tout $i_0, j_0 \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned} Tr(AE_{i_0j_0}) &= Tr((\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}E_{ij})E_{i_0j_0}) \\ &= Tr(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}E_{ij}E_{i_0j_0}) \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}Tr(E_{ij}E_{i_0j_0}) \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}Tr(\delta_{ji_0}E_{ij_0}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii_0}Tr(E_{ij_0}) \\ &= a_{j_0i_0}. \end{aligned}$$

Or $Tr(AE_{i_0j_0}) = f_A(E_{i_0j_0}) = 0$, donc $a_{j_0i_0} = 0$. Cela étant vrai pour tout $i_0, j_0 \in [\![1, n]\!]$, on en déduit que A est la matrice nulle.
On a donc bien f un isomorphisme.

2) f étant un isomorphisme, il existe $A \in M_n(K)$ tel que $f_A = \tilde{f}$ car $\tilde{f} \in M_n(K)^*$.
$\forall X, Y \in M_n(K)$, on a $\tilde{f}(XY) = \tilde{f}(YX)$, c'est-à-dire :
$Tr(AXY) = Tr(AYX)$ or $Tr(AYX) = Tr((AY)X) = Tr(X(AY)) = Tr(XAY)$. On en déduit donc que $Tr((AX - XA)Y) = 0$.
Cela vaut pour tout $Y \in M_n(K)$ donc d'après la question précédente $AX = XA$. Cela

valant pour tout $X \in M_n(K)$ alors $A \in Z(M_n(K)) = \{\lambda I_n,\ \lambda \in K\}$.

En effet, $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $AE_{ij} = E_{ij}A$, en notant $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ on a alors :

$$\begin{aligned} AE_{ij} &= \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{kl}E_{kl}E_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}E_{kj}. \\ &= E_{ij}A = \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{kl}E_{ij}E_{kl} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl}E_{il}. \end{aligned}$$

Par unicité de cette écriture on a donc $a_{ki} = 0$ si $k \neq i$, $a_{jl} = 0$ si $l \neq j$ et $a_{ii} = a_{jj}$.
Notons $\lambda = a_{11}$, alors on a $A = \lambda I_n$ où $\lambda \in K$.
Donc $\forall X \in M_n(K)$, $\tilde{f}(X) = Tr(\lambda I_n X) = \lambda Tr(X)$.

□

Ref : FGN, Algèbre 1, p.305